INVARIANTS PAR SOMME D'ÉTATS

A.V.
(11/06/21)

I – INVARIANTS

$\mathcal{O}$ = classe d'objets $\qquad$ $\sim$ = relation d'équivalence sur $\mathcal{O}$

Un invariant (pour $\sim$) sur $\mathcal{O}$ est

$$M \in \mathcal{O} \longmapsto I(M) \text{ quantité (nombre, groupe, ...)}$$

telle que $\boxed{M \sim M' \Rightarrow I(M) = I(M')}$.

L'invariant est complet si $M \sim M' \Leftrightarrow I(M) = I(M')$.

Utilisation : $I(M) \neq I(M') \Rightarrow M \nsim M'$.

Ex :

- $\mathcal{O}$ = ensembles finis $\qquad$ $\sim$ = bijection

  $I(E) = \mathrm{card}(E)$ $\qquad$ complet

- $\mathcal{O}$ = matrices carrées sur $\mathbb{k}$ $\qquad$ $\sim$ = similitude

  $I(M) = \chi_M(X) \in \mathbb{k}[X]$ $\qquad$ polynôme caractéristique

- $\mathcal{O}$ = surfaces compactes sans bord orientables $\qquad$ $\sim$ = homéomorphie

  $I(\Sigma) = \text{genre}(\Sigma)$ $\qquad$ complet

- $\mathcal{O}$ = espaces topologiques $\qquad$ $\sim$ = équivalence d'homotopie

  $I(X) = \Pi_1(X)$ groupoïde fondamental

• $\mathcal{O}$ = entrelacs orientés dans $\mathbb{R}^3$ $\sim$ = isotopie

$S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \xhookrightarrow{L} \mathbb{R}^3$

$$I(L) = V_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$$ polynôme de Jones

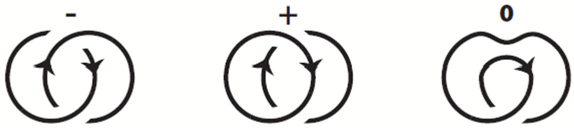
V_L est caractérisé par $\boxed{V_O(t) = 1}$ et

L_+ :  L_- :  L_0 : 

$$\boxed{t^{-1} V_{L_+}(t) - t\, V_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\, V_{L_0}(t)}$$

$$t^{-1} V_O - t V_O = (t^{1/2} - t^{-1/2}) V_{OO}$$

$\rightsquigarrow$ $\underline{V_{OO} = -t^{-1/2} - t^{1/2}}$

$H =$ 

$$t^{-1} V_{OO} - t V_H = (t^{1/2} - t^{-1/2}) V_O$$

$\rightsquigarrow$ $\underline{V_H = -t^{-1/2} - t^{-5/2}}$

$T =$ 

$$t^{-1} V_O - t V_T = (t^{1/2} - t^{-1/2}) V_H$$

$\rightsquigarrow$ $\underline{V_T = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}}$

<u>Rq</u> : Le polynôme de Jones peut être défini de plusieurs manières dont :
- via les représentations de B_n dans les algèbres de Temperley-Lieb
- via le crochet de Kauffman
- via la représentation fondamentale du groupe quantique $U_q(sl_2)$
- comme la caractéristique d'Euler de l'homologie de Khovanov
- par somme d'états

II – INVARIANTS PAR SOMMES D'ÉTATS

$\mathcal{O}$ = classe d'objets $\qquad\qquad$ $\sim$ = relation d'équivalence sur $\mathcal{O}$

Méthode de construction :

- description de $M \in \mathcal{O}$ combinatoirement par P
- notion d'état c sur P
- définition d'une quantité $|P, c|$

} souvent au moyen d'une donnée algébrique

$$\boxed{I(M) = \sum_{c \text{ état}} |P, c|}$$

Ex :

- $\mathcal{O}$ = groupes finiment engendrés $\qquad$ $\sim$ = isomorphie

  $P = \langle X \mid R \rangle$ présentation de $G \in \mathcal{O}$ avec X fini

  H groupe (donnée algébrique)

  Un état est une application $c : X \to H$

$$|P, c| = \begin{cases} 1 & \text{si } w(c(x_1), \dots, c(x_n)) = 1 \text{ pour toute relation } w(x_1, \dots, x_n) \in R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$I_H(G) = \sum_c |P, c| \quad \text{est un invariant de } G$$

On a : $\boxed{I_H(G) = \# \operatorname{Hom}(G, H)}$.

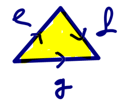
- $\mathcal{O}$ = variétés sans bord $\qquad$ $\sim$ = homéomorphie

  T triangulation de $M \in \mathcal{O}$

  H groupe (donnée algébrique)

Un état est $c : \{\text{arêtes orientées}\} \to H$

$$|T,c| = \begin{cases} 1 & \text{si } \left| \begin{array}{ll} c(-e) = c(e) & \forall \text{ arête orientée} \\ c(g) = c(e)c(f) & \forall \text{ triangle} \end{array} \right. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

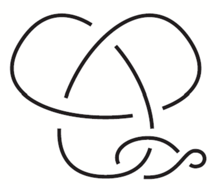


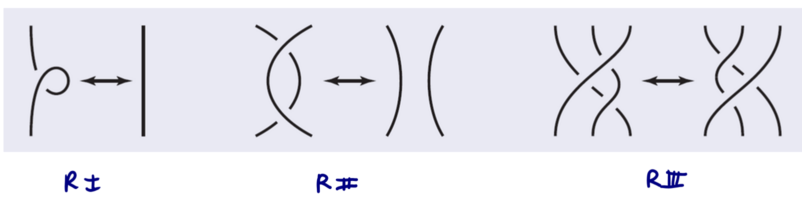
$I_H(M) = \sum_c |T,c|$ est un invariant de M

On a : $\boxed{I_H(M) = \# \operatorname{Hom}(\pi_1(M), H)}$

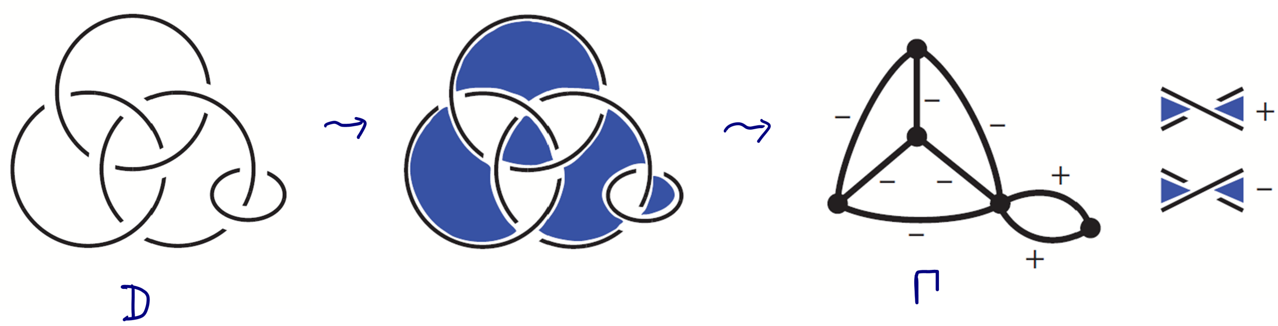
III - INVARIANTS D'ENTRELACS PAR SOMME D'ÉTATS (MODÈLE DE POTTS)

Reidemeister (1926) : deux diagrammes d'un entrelacs sont reliés par des isotopies planes et les mouvements :





Un diagramme D d'un entrelacs L peut être codé par un graphe planaire signé Γ :



Un état de Γ est $c : \{\text{sommets de } \Gamma\} \longrightarrow E$

où E ensemble fini à n éléments.

Fonctions de poids $w_\pm : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ pour les arêtes (donnée algébrique)

$$\underset{s_1}{\bullet}\overset{a}{\text{———}}\underset{s_2}{\bullet} \quad \longmapsto \quad w_{\varepsilon(a)}\big(c(s_1), c(s_2)\big)$$

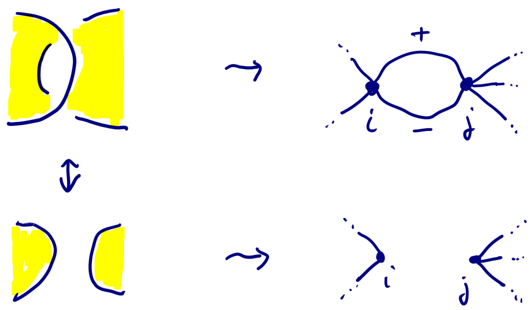
On définit (modèle de Potts) :

$$\boxed{|D, c| = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\#\text{ sommets de } \Gamma} \prod_{a \text{ arête de } \Gamma} w_{\varepsilon(a)}\big(c(s_1), c(s_2)\big)}$$

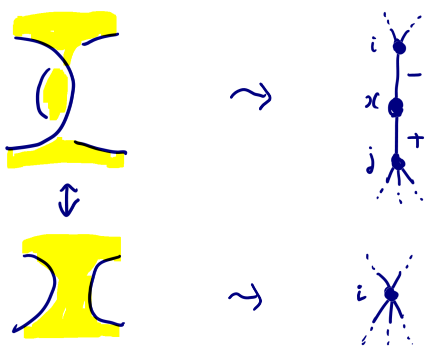
puis $$\boxed{Z(D) = \sum_{c \text{ états}} |D, c|}$$

Arêtes non orientées $\Rightarrow$ $\underline{w_\pm(i,j) = w_\pm(j,i)}$ ($w_\pm$ symétrique)

RII :

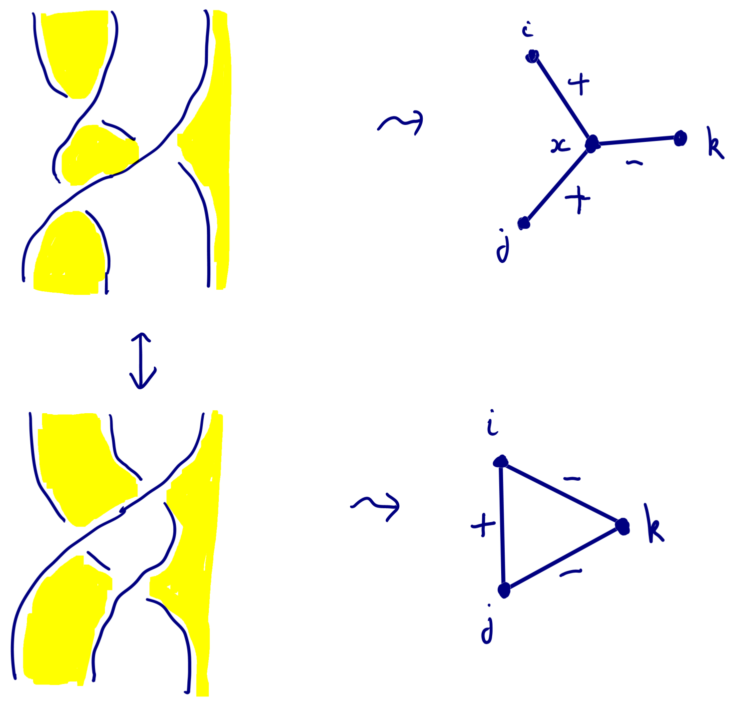


$\Rightarrow$ $\underline{w_+(i,j)\ w_-(i,j) = 1}$



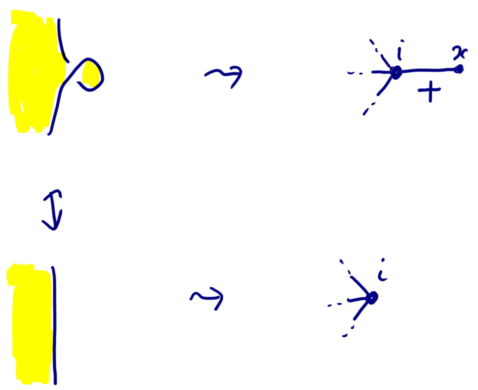
$\Rightarrow$ $\underline{\sum_{x \in E} w_-(i,x)\ w_+(x,j) = \sqrt{n}\ \delta_{i,j}}$

RIII :



$$\Rightarrow \quad \underline{\sum_{x \in E} w_+(i,x)\, w_+(j,x)\, w_-(x,k) = \sqrt{n}\, w_+(i,j)\, w_-(i,k)\, w_-(j,k)}$$

RI :



$$\Rightarrow \quad Z\big(\;\big) = A\, Z\big(\,|\,\big)$$

$$\underline{A = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x \in E} w_+(i,x) = w_-(j,j)}$$

De même : $Z\big(\;\big) = A^{-1}\, Z\big(\,|\,\big)$

L entrelacs orienté. D diagramme de L.

$$\boxed{I(L) = A^{\#\{\times\} - \#\{\times\}}\, Z(D)}$$

est un invariant d'isotopie

<u>Ex:</u> $w_+(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -t^{-1} & \text{si } i \neq j \end{cases}$ où $2 + t + t^{-1} = n$.

$I(L) = V_L(t)$ polynôme de Jones

IV – INVARIANTS DES 3-VARIÉTÉS PAR SOMME D'ÉTATS

Donnée algébrique : $\mathcal{C}$ catégorie de fusion

- → monoïdale
  - $(X,Y) \mapsto X \otimes Y$ associatif
  - $\mathbb{1}$ objet unité
- → avec dualité $X \mapsto X^*$
  ($\Rightarrow$ les objets ont une dimension)
- → $\mathcal{C}$ $\Bbbk$-linéaire
- → finiment semisimple et $\mathbb{1}$ simple
  (X simple si $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) = \Bbbk\, \mathrm{id}_X$)

I = ensemble représentatif des objets simples

La dimension de $\mathcal{C}$ est $\dim(\mathcal{C}) = \sum_{i \in I} \dim(i)^2$.

Pour $i, j, k, l, m, n \in I$ $\rightsquigarrow$ $6j$-symboles $\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}$

$H_{i,j}^{l} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(l, i \otimes j)$ $\Bbbk$-ev

$$i \otimes j = \bigoplus_{l} H_{i,j}^{l} \otimes l$$

$$(i \otimes j) \otimes k = \bigoplus_{l} H_{i,j}^{l} \otimes l \otimes k = \bigoplus_{l,m} H_{i,j}^{l} \otimes H_{l,k}^{m} \otimes m$$

$$i \otimes (j \otimes k) = \bigoplus_{n,m} H_{i,n}^{m} \otimes H_{j,k}^{n} \otimes m$$

L'associateur $(i \otimes j) \otimes k \cong i \otimes (j \otimes k)$ de $\mathcal{C}$ induit iso

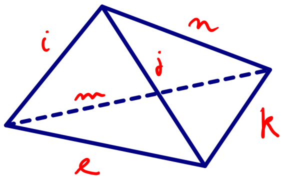
$$\phi_{i,j}^{k,m} : \bigoplus_{l} H_{i,j}^{l} \otimes H_{l,k}^{m} \longrightarrow \bigoplus_{n} H_{i,n}^{m} \otimes H_{j,k}^{n}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix} = \left(\phi_{i,j}^{k,m} \right)_{l,n}$$

M 3-variété compacte orientée sans bord.

T = triangulation de M

Un état est $c : \{\text{arêtes de } T\} \longrightarrow I$

tétraèdre $\Delta =$ 

$\longmapsto \quad |\Delta| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}$

On définit :

$$\boxed{|T,c| = \Big(\prod_{a \text{ arête}} \dim(c(a))\Big) \underset{\text{faces}}{\text{contraction}} \Big(\bigotimes_{\Delta \text{ tétraèdre}} |\Delta|\Big) \in \Bbbk}$$

puis $$\boxed{|M|_{\mathcal{C}} = (\dim \mathcal{C})^{-\#\text{ sommets}} \sum_{c \text{ état}} |T,c|}\ .$$

Alors $|M|_{\mathcal{C}}$ est un invariant des 3-variétés

<u>Ex:</u>

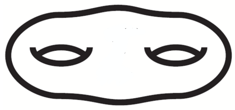
- G gpe fini
  $\mathcal{C} = \operatorname{Rep}(G)$ est de fusion
  $|M|_{\mathcal{C}} = \#\operatorname{Hom}(\pi_1(M), G)$

- G gpe fini $\quad \theta \in H^3(G, \Bbbk^*)$
  θ définit un associateur sur $G\text{-Vect}_{\Bbbk}$
  $\mathcal{C} = G\text{-Vect}_{\Bbbk}^{\theta}$ est de fusion

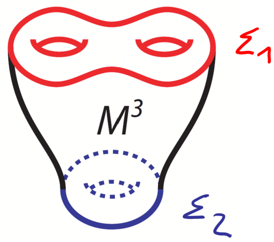
  $|M|_{\mathcal{C}} = \sum_{f \in [M, BG]} \langle f^*(\theta), [M] \rangle$ invariant de Dijkgraaf-Witten

- catégories de fusion via les groupes quantiques

$\boxed{|M|_{\mathcal{C}} \text{ s'étend en une TQFT de dim } 3}$



Σ surface $\longmapsto$ $\tau(\Sigma)$ $\Bbbk$-espace vectoriel



cobordisme $\longmapsto$ $\tau(M) : \tau(\Sigma_1) \to \tau(\Sigma_2)$ linéaire

$$\tau(M \cup_\Sigma N) = \tau(M) \circ \tau(N) \qquad \tau(\Sigma \times [0,1]) = \mathrm{id}_{\tau(\Sigma)} \qquad \tau(\emptyset) \simeq \Bbbk$$

$$\tau(\Sigma \sqcup \Sigma') \simeq \tau(\Sigma) \otimes_{\Bbbk} \tau(\Sigma') \qquad \tau(M \sqcup M') \simeq \tau(M) \otimes_{\Bbbk} \tau(M')$$

<u>Rq</u> :

- Fournit des représentations des groupes modulaires

$$\mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathrm{Homeo}(\Sigma) / \mathrm{Homeo}_0(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\tau(\Sigma))$$

- Relié à la gravité quantique en dimension 3 de Ponzano - Regge

- Reliée à la TQFT Chern-Simons de Witten (via le centre catégorique)