Géométrie Fractale d'ensembles de Julia

Volker MAYER

Université de Lille

Lille, 31 Mars 2022

Dynamique de fonctions holomorphes

$$f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad \text{holomorphe}$$

$\swarrow$ $\exists$prolongt ∞ sinon $\searrow$

polynôme / fraction rationnelle transcendante entière ou méromorphe

$$f(z) = z^2 + \lambda\,,\ \ \lambda \in \mathbb{C} \qquad\qquad f(z) = \lambda e^z\ ,\ \ \lambda \in \mathbb{C}^*$$

$$\wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

Comportement d'orbites $z_0 \mapsto z_1 = f(z_0) \mapsto \ldots \mapsto z_n = f^n(z_0) \mapsto \ldots$ en fonction d'un point initial z_0 :

Ensemble de Fatou :

$$\mathcal{F}_f = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \ (f^n)_n \text{ définie et normale (Montel) dans un voisinage de } z\}$$

Ensemble de Julia : $\mathcal{J}_f = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}_f$.

Figure – $f_0(z) = z^2$, $f_\varepsilon(z) = z^2 + \varepsilon$ puis $f_\lambda(z) = \lambda e^z$

Dynamique de fonctions holomorphes

Comportement d'orbites $z_0 \mapsto z_1 = f(z_0) \mapsto \ldots \mapsto z_n = f^n(z_0) \mapsto \ldots$ en fonction d'un point initial z_0 :

Ensemble de Fatou :

$$\mathcal{F}_f = \{z \in \mathbb{C}\,; \;\; (f^n)_n \text{ définie et normale (Montel) dans un voisinage de } z\}$$

Ensemble de Julia : $\mathcal{J}_f = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}_f$.

Figure – $f_0(z) = z^2$, $f_\varepsilon(z) = z^2 + \varepsilon$ puis $f_\lambda(z) = \lambda e^z$

$\exists$ d'autres ensembles dynamiquement importants tels que

Bassin d'attraction de l'∞ d'un polynôme $A(\infty) = \{z \in \mathbb{C}\,, \;\; f^n(z) \to \infty\}$

Escaping set d'une fonction transcendante $\mathcal{I}_f = \{z \in \mathbb{C}\,, \;\; f^n(z) \to \infty\}$.

Fractales

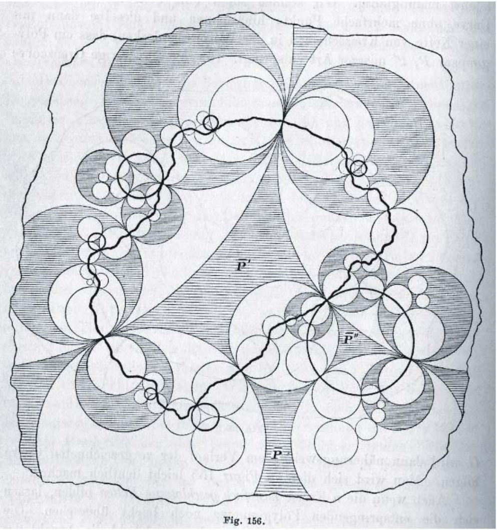


Figure – Fricke & Klein 1897

Fractales : Poincaré, Fricke et Klein

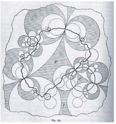


Figure – Fricke & Klein 1897

- C'est certainement la première fractale, dessiné par Fricke élève de Klein.
- Objet de nombreuses commentaires dont (voir "Fatou, Julia, Montel" de M. Audin) :

  des Œuvres de Poincaré). Ensuite parce qu'elle a fait l'objet d'une critique de Mandelbrot [1983] :

  > *It now seems that Figure 6* [notre figure IV.3] *was drawn by a hapless draftsman* [un malheureux dessinateur] *(legend has it that he was an engeenering student in Fricke's class), who had been instructed how to determine a few points of L exactly, and was then left to draw "some very wiggly and complicated curve" passing through these points. As Fricke did not know what to expect, the draftsman received no explicit directions.*

- Poincaré : Si L n'est pas un cercle, alors cette courbe doit être très irrégulière, pas de tangente en aucun point.
- Fricke et Klein : Si L n'est pas un cercle, alors c'est une courbe non rectifiable.

Dichotomie de Bowen et analyticité par Ruelle

Revenons au polynômes.

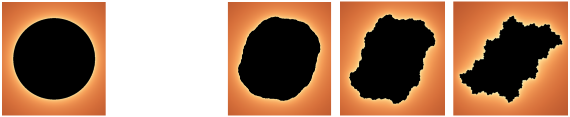


Figure – $f_0(z) = z^2$ puis $f_\varepsilon(z) = z^2 + \varepsilon$

Dans ce contexte, on peut réinterpréter la discussion historique précédente :

- Poincaré : Si $\mathcal{J}(f)$ n'est pas un cercle, alors cette courbe doit être très irrégulière, pas de tangente en aucun point.
- Fricke et Klein : Si $\mathcal{J}(f)$ n'est pas un cercle, alors c'est une courbe non rectifiable.

Dichotomie de Bowen et analyticité par Ruelle

Revenons au polynômes.

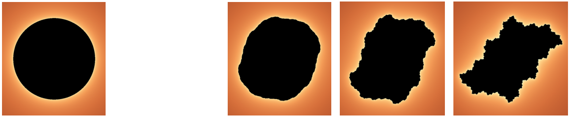


Figure – $f_0(z) = z^2$ puis $f_\varepsilon(z) = z^2 + \varepsilon$

Dans ce contexte, on peut réinterpréter la discussion historique précédente :

- Poincaré : Si $\mathcal{J}(f)$ n'est pas un cercle, alors cette courbe doit être très irrégulière, pas de tangente en aucun point.
- Fricke et Klein : Si $\mathcal{J}(f)$ n'est pas un cercle, alors c'est une courbe non rectifiable.

Beaucoup plus tard, dans les années 70', employant le Formalisme Thermodynamique :

- Formule de Bowen pour $Hdim(\mathcal{J}_f)$.
- Dichotomie de Bowen : Si $\mathcal{J}(f)$ n'est pas un cercle, alors $Hdim(\mathcal{J}(f)) > 1$.
- Analyticité de Ruelle : $\varepsilon \mapsto Hdim(\mathcal{J}(f_\varepsilon))$ est une fonction analytique et

$$Hdim(\mathcal{J}(f_\varepsilon)) = 1 + \frac{|\varepsilon|^2}{4 \log 2} + o(|\varepsilon|^2)$$

Singularités et hyperbolicité

Le formalisme thermodynamique ne s'applique pas a toutes les fonctions $\rightsquigarrow$ Fonctions hyperboliques :

- Singularité algébrique : a est une val. critique s'il existe c tel que $f'(c) = 0$ et $f(c) = a$.
- Singularité transcendante : a est une val. asymptotique s'il existe un chemin $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ tq. $\gamma(t) \to \infty$ et $f \circ \gamma(t) \to a$ lorsque $t \to \infty$.

$S(f)$ l'ensemble de ces singularités dans $\mathbb{C}$ ($\hat{\mathbb{C}}$ si frac rat.)
Les fonctions transcendantes seront toujours supposées de la classe $\mathcal{B}$: $S(f)$ borné.

Definition

f est hyperbolique si l'ensemble postsingulier

$$P(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^n(S(f))}$$

est un sous-ensemble compact de l'ensemble de Fatou $\mathcal{F}_f$.

Dimension de Hausdorff et mesures conformes

$$HM^t(E) = \lim_{r \to 0} \inf \left\{ \sum r_i^t \,;\;\; E \subset \bigcup \mathbb{D}(z_i, r_i)\,,\; r_i \leq r \right\}$$

- Majoration de $Hdim(E)$ " facile " (inf) : tout recouvrement en donne.
- Minoration souvent delicat. Outil classique :
  Lemme de Frostman : $\exists$ mesure μ tq. $\mu(\mathbb{D}(z,r)) \leq cr^t \implies Hdim(E) \geq t$.

Ce sont les mesures conformes (Patterson - Sullivan) qui jouent ce roule en dynamique holomorphe : ν est t–conforme si

$$\nu(f(U)) = \int_U |f'|^t d\nu \qquad \text{dès que } f_{|U} \text{ est injective}$$

et, plus généralement, (t, ρ)–conforme si

$$\nu(f(U)) = \int_U \rho |f'|^t d\nu \qquad \text{dès que } f_{|U} \text{ est injective}$$

Mesures conformes et opérateur de transfert

ν est (t, ρ)–conforme si $\nu(f(U)) = \int_U \rho |f'|^t d\nu$ dès que $f_{|U}$ est injective.

Theorem (Perron-Frobenius-Ruelle)

Soit f une fraction rationnelle hyperbolique. Alors, pour tout $t \geq 0$ il existe un unique nombre $\rho = \rho(t)$ ($\log \rho$ est la pression topologique) et

- *une unique mesure ν_t qui est (t, ρ)–conforme puis*
- *une unique mesure (de Gibbs, état d'équilibre) μ_t équivalente à ν_t et f–invariante : $\mu_t(f^{-1}(E)) = \mu_t(E)$.*

Mesures conformes et opérateur de transfert

ν est (t, ρ)–conforme si $\quad \nu(f(U)) = \displaystyle\int_U \rho |f'|^t d\nu \quad$ dès que $f_{|U}$ est injective.

Theorem (Perron-Frobenius-Ruelle)

Soit f une fraction rationnelle hyperbolique. Alors, pour tout $t \geq 0$ il existe un unique nombre $\rho = \rho(t)$ ($\log \rho$ est la pression topologique) et

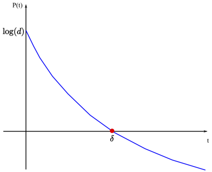
- *une unique mesure ν_t qui est (t, ρ)–conforme puis*
- *une unique mesure (de Gibbs, état d'équilibre) μ_t équivalente à ν_t et f–invariante : $\mu_t(f^{-1}(E)) = \mu_t(E)$.*

Basé sur l'étude de l'opérateur de transfert :

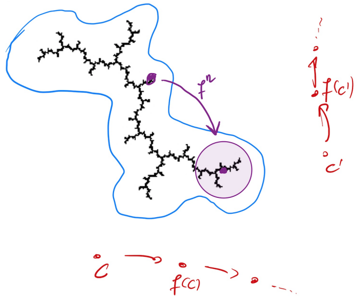
$$\mathcal{L}_t : C^0(\mathcal{J}_f) \to C^0(\mathcal{J}_f) \qquad \text{déf par} \qquad \mathcal{L}_t g(w) = \sum_{z \in f^{-1}(w)} |f'(z)|^{-t} g(z)\,.$$

Notamment, la pression topologique

$$P(t) = \log \rho(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{L}_t^n 1(w)\,.$$



Frations rationnelles hyperboliques



f hyperbolique $\implies$ $\exists \delta > 0$ tq.
pour tout $D = \mathbb{D}(w, \delta)$, $w \in \mathcal{J}_f$, tout $n \geq 1$ et toute composante U de $f^{-n}(D)$ l'appl.

$$f^n_{|U} : U \to D = \mathbb{D}(w, \delta) \quad \text{est inversible.}$$

Thm de distortion bornée de Koebe (avec constante universelle "1/4")

$$|(f^n)'(z_1)| \asymp |(f^n)'(z_2)| \quad \text{pour tous } z_1, z_2 \in U$$

Donc, $U \asymp$ disque et $diam(U) \asymp |(f^n)'(z)|^{-1}$, $z \in U$.
Expansivité : $diam(U) \preceq \eta^n < 1$.

Formule de Bowen

Supposons t tq. $P(t) = 0$, donc $\rho(t) = 1$. Alors, avec les notations précédentes,

$$1 \asymp \nu_t(\mathbb{D}(w,\delta)) = \int_U |(f^n)'|^t d\nu_t \asymp |(f^n)'|^t(z)\, \nu_t(U)\,, \quad z \in U, \quad donc$$

$$\nu_t(U) \asymp diam(U)^t \qquad \text{"Frostman"}.$$

Formule de Bowen

Supposons t tq. $P(t) = 0$, donc $\rho(t) = 1$. Alors, avec les notations précédentes,

$$1 \asymp \nu_t(\mathbb{D}(w,\delta)) = \int_U |(f^n)'|^t d\nu_t \asymp |(f^n)'|^t(z)\, \nu_t(U)\,, \quad z \in U, \quad donc$$

$$\nu_t(U) \asymp diam(U)^t \qquad \text{"Frostman"}.$$

Theorem (Formule de Bowen)

Soit f une fraction rationnelle hyperbolique. Alors il existe un unique paramètre t qui annule la pression topologique et

$$Hdim(\mathcal{J}_f) = t\,.$$

Formule de Bowen

Supposons t tq. $P(t) = 0$, donc $\rho(t) = 1$. Alors, avec les notations précédentes,

$$1 \asymp \nu_t(\mathbb{D}(w,\delta)) = \int_U |(f^n)'|^t d\nu_t \asymp |(f^n)'|^t(z)\, \nu_t(U)\,, \quad z \in U, \quad donc$$

$$\nu_t(U) \asymp diam(U)^t \qquad \text{"Frostman".}$$

Theorem (Formule de Bowen)

Soit f une fraction rationnelle hyperbolique. Alors il existe un unique paramètre t qui annule la pression topologique et

$$Hdim(\mathcal{J}_f) = t\,.$$

Remarque : Ce que la formule montre véritablement est que l'unique zero de la pression est la dimension hyperbolique :

$$HypDim(f) = \sup\{Hdim(K)\,, \quad K \quad expanding\}$$

- Si f frac rat. hyperbolique alors $\mathcal{J}_f$ expanding et $HypDim(f) = Hdim(\mathcal{J}_f)$.
- En générale $HypDim(f) \leq Hdim(\mathcal{J}_f)$ (car $K \subset \mathcal{J}_f$).
- Avila-Lyubich (2016) : $\exists$ polynomial f tq. $HypDim(f) < Hdim(\mathcal{J}_f) = 2$.

L'analyticité de Ruelle

Soit $\mathcal{F}$ une famille analytique de fractions rationnelles, par ex.

$$\mathcal{F} = \{f_\lambda(z) = z^2 + \lambda\,,\ \ \lambda \in \mathbb{C}\}$$

ou $\mathcal{F}$ la famille de toutes les fractions rationnelles d'un degree $d \geq 2$.

Theorem (Ruelle 82' (répondant à une conjecture de Sullivan))

La fonction

$$f \mapsto Hdim(\mathcal{J}_f)$$

est analytique au voisinage de toute application hyperbolique $f_0 \in \mathcal{F}$.

L'analyticité de Ruelle

Soit $\mathcal{F}$ une famille analytique de fractions rationnelles, par ex.

$$\mathcal{F} = \{f_\lambda(z) = z^2 + \lambda\ ,\ \ \lambda \in \mathbb{C}\}$$

ou $\mathcal{F}$ la famille de toutes les fractions rationnelles d'un degree $d \geq 2$.

Theorem (Ruelle 82' (répondant à une conjecture de Sullivan))

La fonction

$$f \mapsto Hdim(\mathcal{J}_f)$$

est analytique au voisinage de toute application hyperbolique $f_0 \in \mathcal{F}$.

L'hyperbolicité est essentielle ici :

Theorem (Douady, Sentenac et Zinsmeister 97')

$\mathcal{F} = \{f_\lambda(z) = z^2 + \lambda\ ,\ \ \lambda \in \mathbb{C}\}$. *La fonction*

$$\lambda \mapsto Hdim(\mathcal{J}_\lambda)$$

n'est pas continue en $\lambda_0 = 1/4$ (paramètre "parabolique").

Fonctions entières et méromorphes

M. Urbański et VM [Memoirs AMS 2010, TAMS 2020] : Formalisme thermodynamique + applications dans ce cadre.

Quelques différences :

- $\mathcal{J}_f$ n'est pas compact.
- Considérons $f(z) = \lambda e^z$. C'est une fonction périodique et donc l'operateur de transfert usuel

$$\mathcal{L}_t 1(w) = \sum_{f(z)=w} |f'(z)|^{-t} \equiv \infty \; ! \qquad \rightsquigarrow \quad \text{n'est simplement pas défini.}$$

  Solution :
  - (pour les géomètres) Remplacer la métrique euclidienne par une autre métrique Riemannienne adapté.
  - (pour les physiciens) Faire un changement cohomologique du potentiel dans l'opérateur.
- L'approche dans [TAMS 2020], valable pour des fonctions entières, donne une expression précise de $\mathcal{L}_t 1$ en fonction des singularités sur l'∞ :

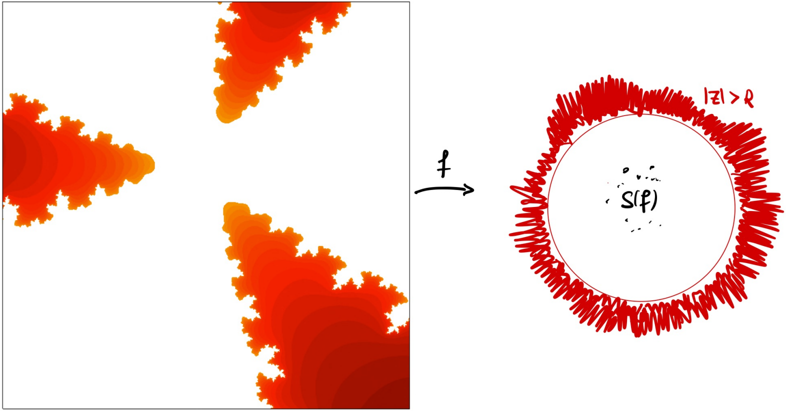


Figure – Singularités fractales avec dimension à l'infini $\Theta > 1$

Moyenne intégrales d'une application conforme

$\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ **quasidisque borné** $\qquad \beta(t) = \limsup_{r \to 1} \log \dfrac{\int_{S^1} |\varphi'(r\xi)|^t |d\xi|}{-\log(1-r)}$

se comporte "comme une pression topologique" :

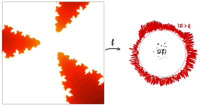
$$Mdim(\partial\Omega) = \text{ l'unique zero de } \quad t \mapsto \beta(t) - t + 1\ .$$

Moyenne intégrales d'une application conforme

$\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ **quasidisque borné** $\qquad \beta(t) = \limsup_{r \to 1} \log \dfrac{\int_{S^1} |\varphi'(r\xi)|^t |d\xi|}{-\log(1-r)}$

se comporte "comme une pression topologique" :

$$Mdim(\partial\Omega) = \text{ l'unique zero de } \quad t \mapsto \beta(t) - t + 1 \; .$$



- La dimension à l'infini Θ est également déterminée par une moyenne intégrale.
- Θ est paramètre de transition pour $\mathcal{L}_t$.
- Comportement exact de l'opérateur de transfert en fonction de moyennes intégrales, $t > \Theta$.

$\Longrightarrow$ tout le formalisme thermodynamique & applications :
Formule de Bowen, propriétés de Ruelle etc.

Formules de Bowen pour des fonctions entières

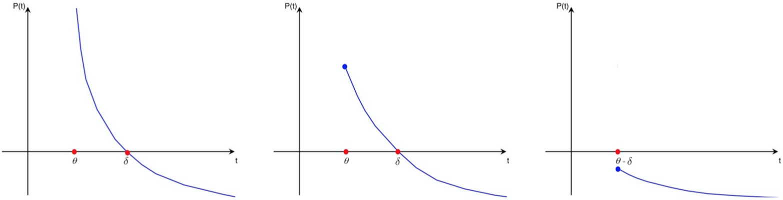


Figure – Possibilités pour la pression topologique

Formule de Bowen (Barański, Karpinska et Zdunik) $\delta = HypDim(f)$.

Remarques :

- Ici il s'agit vraiment de $HypDim(f)$ et non pas de $Hdim(\mathcal{J}_f)$!
  Rappelons qu'ici $\mathcal{J}_f \supset \mathcal{I}_f = \{z\ ;\ \ f^n(z) \to \infty\}$ "escaping set".
  Poincaré recurrence : $\mu_t(I_f) = 0$, support mesure conforme dans $\mathcal{J}_f \setminus \mathcal{I}_f$.
- McMullen (1987) : $Hdim(\mathcal{I}_f) = 2$
- Stallard (∼2000) : $HypDim(f_\lambda) < Hdim(\mathcal{J}_{f_\lambda}) = 2$.

Propriété de Ruelle pour des fonctions entières

La variation analytique de la dimension hyperbolique pour des fonctions transcendantes à été montré dans des nombreux cas ([M.-Urbański-Zdunik, Urbański-Skorulski]). Par ex. pour $f_\lambda(z) = \lambda e^z$, $\lambda \in (0, 1/e)$

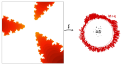
$$\lambda \mapsto HypDim(f_\lambda) \quad \text{est analytique dans } (0, 1/e).$$

Propriété de Ruelle pour des fonctions entières

La variation analytique de la dimension hyperbolique pour des fonctions transcendantes à été montré dans des nombreux cas ([M.-Urbański-Zdunik, Urbański-Skorulski]). Par ex. pour $f_\lambda(z) = \lambda e^z$, $\lambda \in (0, 1/e)$

$$\lambda \mapsto HypDim(f_\lambda) \quad \text{est analytique dans } (0, 1/e).$$

Utilisant



Theorem (V.M., A. Zdunik Adv.M. 2021)

Il existe une famille holomorphe d'applications entières $\mathbf{F}_\lambda = \lambda\,\mathbf{F}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $\mathbf{F}_\lambda$, $\lambda \in (0, 1]$ appartiennent a une composante hyperbolique de l'espace des paramètres mais $\lambda \mapsto HypDim(\mathbf{F}_\lambda)$ n'est pas analytique dans $(0, 1]$.

- Dans le cadre des groupes quasifuchsiens, Astala-Zinsmeister 1994 ont donné le premier exemple pour lequel la propriété de Ruelle n'est pas valable (puis Bishop en a donnée un critère).

Dimension de l'"escaping set" $\mathcal{I}_f = \{z \,;\ f^n(z) \to \infty\}$

Soit f méromorphe de type bornée, soient $(a_j)_j$ ses pôles et m_j la multiplicité de a_j. Alors, il existe $b_j \in \mathbb{C}$ tq., près de a_j,

$$f(z) \sim \left(\frac{b_j}{z - a_j}\right)^{m_j}.$$

Supposons $\limsup_{j\to\infty} m_j = M < \infty$.

Theorem (VM, M. Urbański GAFA 2022)

Si f est une telle application méromorphe et si ∞ n'est pas valeur asymptotique alors

$$Hdim(\mathcal{I}_f) = \delta$$

oú δ est l'exposant critique de la série

$$\sum_{j \text{ s.t. } a_j \neq 0} \left(\frac{|b_j|}{|a_j|^{1+1/M}}\right)^t.$$

Le point de départ de ce travail est un papier de W. Bergweiler et J. Kotus 2012 qui ont (implicitement) montré que $Hdim(\mathcal{I}_f) \leq \delta$.

Theorem (VM, M. Urbański GAFA 2022)

Si f est une telle application méromorphe et si ∞ n'est pas valeur asymptotique alors

$$Hdim(\mathcal{I}_f) = \delta$$

oú δ est l'exposant critique de la série

$$\sum_{j \text{ s.t. } a_j \neq 0} \left(\frac{|b_j|}{|a_j|^{1+1/M}} \right)^t .$$

Le point de départ de ce travail est un papier de W. Bergweiler et J. Kotus 2012 qui ont (implicitement) montré que

$$Hdim(\mathcal{I}_f) \leq \delta.$$

Combinant avec McMullen + généralisations Barański, Schubert $\Longrightarrow$

Corollary

Si $f \in \mathcal{B}$ est méromorphe d'ordre finie avec multiplicités des pôles bornées, alors

- $Hdim(\mathcal{I}_f) = 2$ *si ∞ est valeur asymptotique et*
- $Hdim(\mathcal{I}_f) = \delta$, *$\delta$ donné par le théorème précédent.*